**Temat: Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego.**

Niech P(x,y) będzie dowolnym punktem w układzie współrzędnych:

 y

 P(x,y)

 ●

 0 x

Przez punkt P (x,y) prowadzę końcowe ramię kata ostrego $α$

 y

 P(x,y)

 ●

 $α$

 0 x

Aby wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta $α$ wykorzystuję trójkąt prostokątny, o przyprostokątnych długości x i y oraz przeciwprostokątnej długości r:

 y

 P(x,y)

 ●

 r y

 $α$ ●

 0 x x

Zatem:

$sinα=\frac{y}{r}$$cosα=\frac{x}{r}$$tgα=\frac{y}{x}$ $ctgα=\frac{x}{y}$ Długość przeciwprostokątnej r obliczam stosując twierdzenie Pitagorasa:

$r^{2}=x^{2}+y^{2}$

$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

Stosując powyższe wzory możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne dowolnego kąta $α\in \left〈0^{o};180^{o}\right〉$.

Definicja:

Niech P(x,y) będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu koncowym kąta $α\in \left〈0^{o};180^{o}\right〉$, różnym od początku układu współrzędnych.

 y

 P(x,y)

 ● y

 r

 $α$

 x 0 x

Wtedy:

$sinα=\frac{y}{r}$$cosα=\frac{x}{r}$$tgα=\frac{y}{x}$ $ctgα=\frac{x}{y}$ ($x\ne 0,$ czyli $α\ne 90^{o})$

gdzie $r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

*Przykład 1:*

Punkt P(-9, 3) należy do końcowego ramienia kata $α$, a punkt Q(2, 6) należy do końcowego ramienia kąta $β$. Oblicz $sinα-sinβ$

Rozwiązanie:

Aby obliczyć $sinα$ wykorzystuję współrzędne punktu P(-9, 3), zatem

x = -9

y = 3

$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(-9\right)^{2}+\left(3\right)^{2}}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\sqrt{9∙10}=3\sqrt{10}$

$sinα=\frac{y}{r}=\frac{3}{3\sqrt{10}}∙\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{3∙10}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Aby obliczyć $sinβ$ wykorzystuję współrzędne punktu Q(2, 6), zatem

x = 2

y = 6

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(2\right)^{2}+\left(6\right)^{2}}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=\sqrt{4∙10}=2\sqrt{10}$$

$sinβ=\frac{y}{r}=\frac{6}{2\sqrt{10}}∙\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{2∙10}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Obliczam

$$sinα-sinβ=\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{10}}{10}=-\frac{2\sqrt{10}}{10}$$

Przykład 2:

Punkt P(-2, $\sqrt{2}$) należy do końcowego ramienia kata $α$, a punkt Q($\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1) należy do końcowego ramienia kąta $β$. Oblicz $cosα+cosβ$

Rozwiązanie:

Aby obliczyć $sinα$ wykorzystuję współrzędne punktu P(-2, $\sqrt{2}$), zatem

x = -2

y = $\sqrt{2}$

$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(-2\right)^{2}+\left(\sqrt{2}\right)^{2}}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$

$cosα=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{6}}∙\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{-2\sqrt{6}}{6}=\frac{-\sqrt{6}}{3}$

Aby obliczyć $sinβ$ wykorzystuję współrzędne punktu Q($\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1), zatem

x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

y = 1

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+\left(1\right)^{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}+1}=\sqrt{1\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$cosβ=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}∙\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}∙\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2∙3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Obliczam

$$cosα+cosβ=\frac{-\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$$

*Przykład 3:*

Do ramienia końcowego kąta $α$ należy punkt P($\sqrt{2}$, 1). Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozwiązanie:

Punkt P($\sqrt{2}$, 1) zatem:

x = $\sqrt{2}$

y = 1

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^{2}+\left(1\right)^{2}}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

Korzystając z definicji z dzisiejszej lekcji otrzymuję:

$sinα=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}∙\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$cosα=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}∙\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$tgα=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}∙\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$ctgα=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

Zadanie domowe:

str. 173, powtórzenie zad. 1 a), c), e), g)

str. 173, zad. 2 a)

str. 173, zad. 3 a)

Moi drodzy,

Zdjęcia rozwiązanych zadań domowych proszę, o przesłanie na adres mailowy matma2LO@interia.pl do 4.05.2020 r. W temacie wiadomości wpisujemy swoje imię i nazwisko. W razie pytań proszę o kontakt indywidualny przez FB.

Powodzenia.