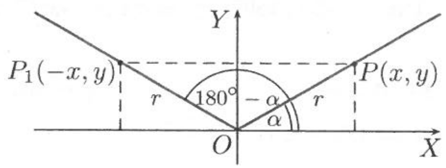
5.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

40. Punkt $P(x, y)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-x, y)$ – do ramienia końcowego kąta $180° - \alpha$. Korzystając z rysunku, uzasadnij tożsamość.



a) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ c) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{y}{-x}$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$
zatem
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

41. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

a) $\alpha = 120°$

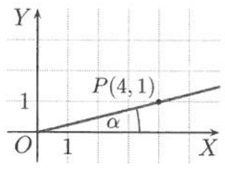
b) $\alpha = 135°$

c) $\alpha = 150°$

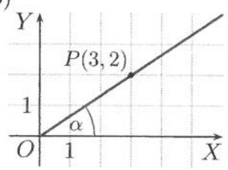
$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

42. Korzystając z rysunku, oblicz $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$.

a)

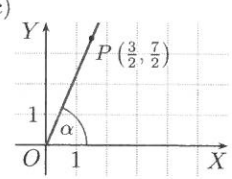


b)



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$

c)



43. Oblicz.

a) $\cos 120° - \sin 30°$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$
Zatem $\cos 120° - \sin 30° = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos 135° \cdot \operatorname{tg} 150°$

c) $\sin 120° \cdot \operatorname{tg} 120°$

44. Przeczytaj podany w ramce przykład.

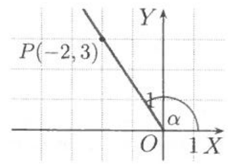
Narysuj kąt $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$, taki że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, więc punkt $P(-2, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α. Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy kąt α.

$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

stąd $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$



Znając $\operatorname{tg}\alpha$ narysuj kąt $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ oraz oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$

45. Oblicz.

a) $\frac{\cos 120° + \sin 150°}{\operatorname{tg} 135°}$ c) $\frac{\sin 135° - \cos 135°}{\operatorname{tg} 120° \cdot \operatorname{tg} 150°}$ e) $\frac{\cos 150° + \sin 120°}{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 150°}$

b) $\frac{\operatorname{tg} 120° - \cos 30°}{\sin 120°}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135° + \cos 45°}{\sin 45° \cdot \cos 135°}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120° - \cos 30°}{\cos 150° + \cos 60°}$